Функции.

Теоретические сведения.

Определение числовой функции.

Если даны числовое множество ***X*** и правило ***f***, позволяющее поставить в соответствие каждому элементу ***x*** из множества *X* определенное число ***y***, то говорят, что **задана функция *y = f(x)* с областью определения *X***; пишут ***y = f(x), x є X***.

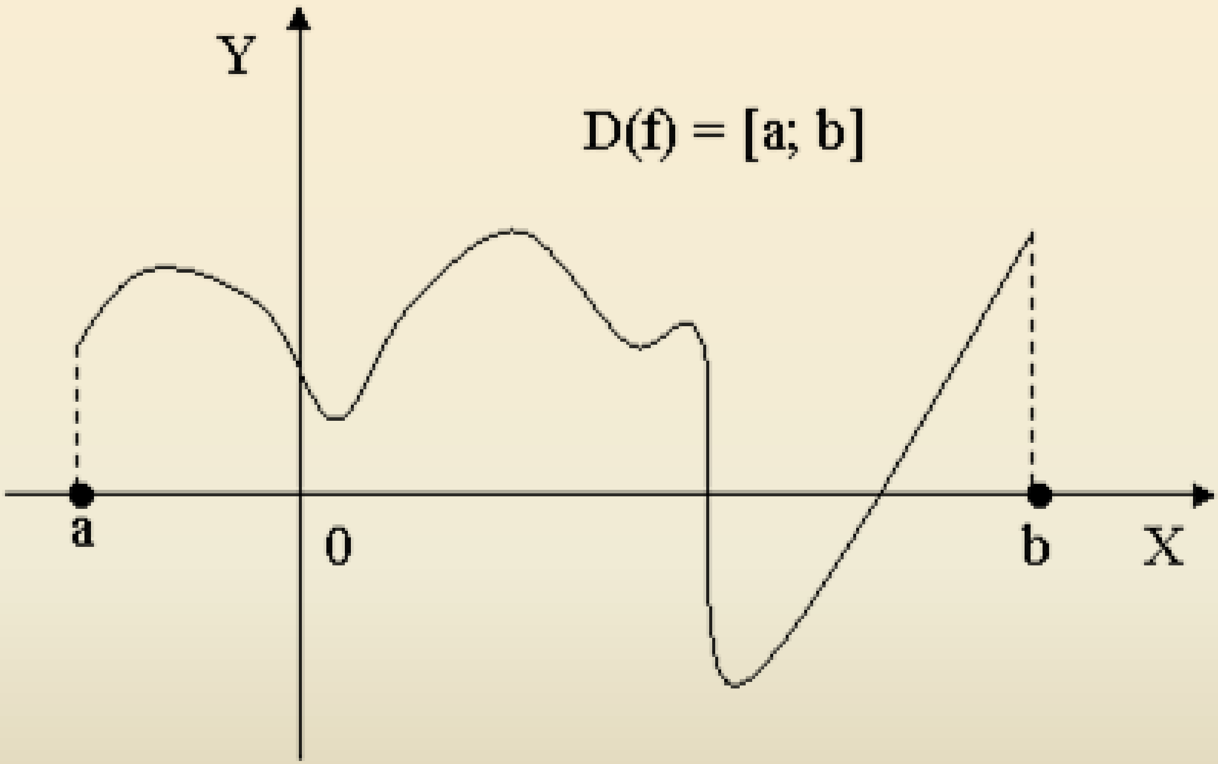
При этом переменную ***x*** называют **независимой переменной** или **аргументом**, а переменную ***y*** – **зависимой переменной**.

Область определения функции

Для области определения функции $y = f(x)$, $x \in X$ иногда удобно использовать обозначение $D(f)$.

Нельзя говорить о функции $y = f(x)$ без указания ее области определения, которая или указывается явно, или подразумевается – в случае, если область определения функции $y = f(x)$ совпадает с областью определения выражения $f(x)$ (такую область определения иногда называют *естественной*).

Область определения функции

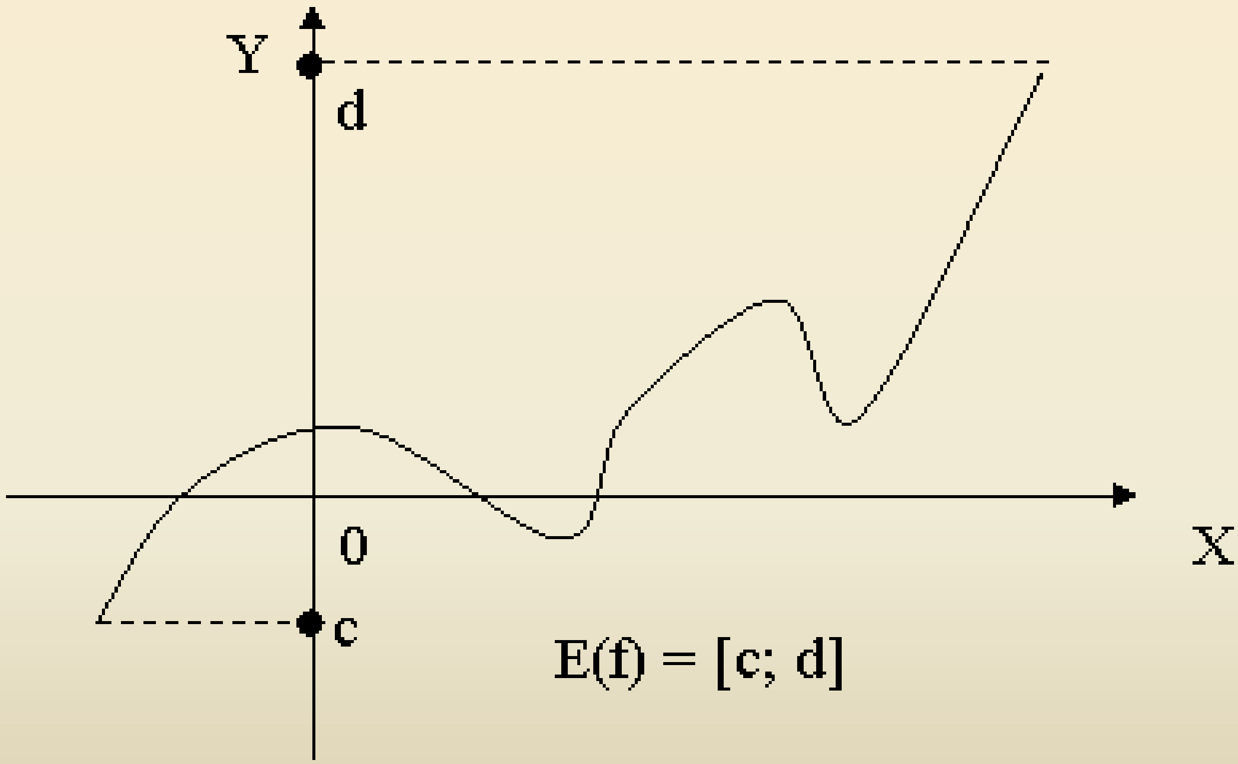


Область значений функции

Множество всех значений функции $y = f(x)$, $x \in X$, называют **областью значений функции** и обозначают $E(f)$.

Если известен график функции, то область значений функции найти сравнительно нетрудно. Для этого достаточно спроецировать график на ось ординат. То числовое множество, геометрическая модель которого получится на оси ординат в результате указанного проецирования, и будет представлять собой $E(f)$.

Область значений функции



Графиком функции называется множество всех таких точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты – соответствующим значениям функции.

Способы задания функции.

- ✓ Аналитический
- ✓ Графический
- ✓ Табличный
- ✓ Словесный

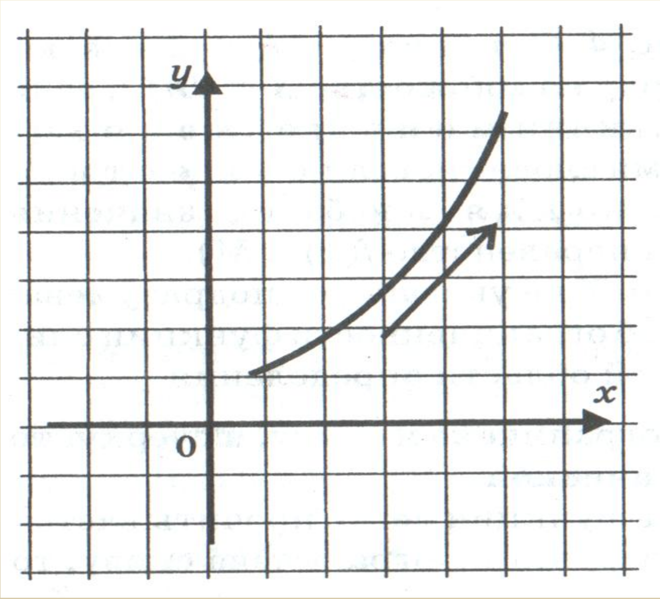
В школьном курсе математики этих способов вполне достаточно.

Свойства функций.

Монотонность.

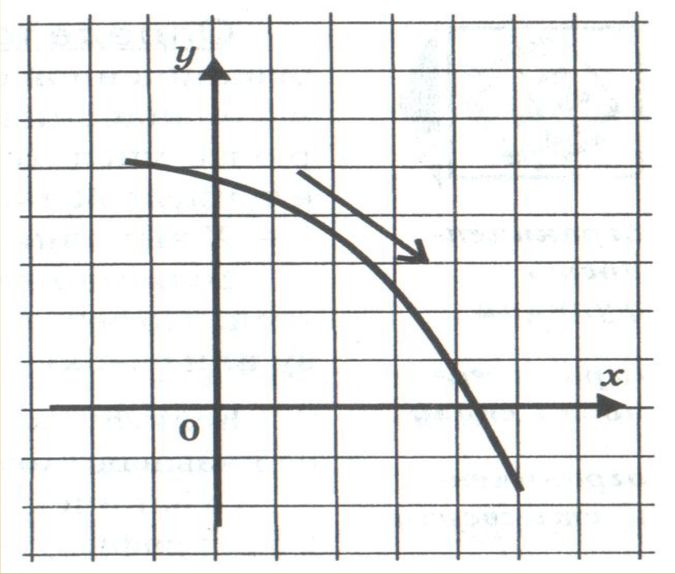
Функцию ***y = f(x)*** называют **возрастающей на множестве X Є *D(f)***, если для любых двух точек x_1 и x_2 множества **X**, таких, что $\mathbf{x_1 < x_2}$, выполняется неравенство

f(x₁) < f(x₂).



Монотонность.

Функцию $y = f(x)$ называют **убывающей на множестве** $X \in D(f)$, если для любых двух точек x_1 и x_2 множества X, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.



Монотонность.

На практике удобнее пользоваться следующими формулировками:

- *функция возрастает, если большему значению аргумента соответствует **большее** значение функции;*
- *функция убывает, если большему значению аргумента соответствует **меньшее** значение функции.*

Монотонность.

Обычно термины «возрастающая функция», «убывающая функция» объединяют общим названием **монотонная функция,** а исследование функции на возрастание или убывание называют *исследованием функции на монотонность*.

Ограниченность.

Функцию ***y = f(x)*** называют **ограниченной снизу на множестве X Є *D(f)***, если все значения функции на множестве **X** больше некоторого числа (иными словами, если существует такое число ***m***, что для любого значения ***x ϵ X*** выполняется неравенство

f(x) > m).

Ограниченность.

Функцию $y = f(x)$ называют **ограниченной сверху на множестве X** $D(f)$, если все значения функции на множестве **X** меньше некоторого числа (иными словами, если существует такое число M, что для любого значения $x \in X$ выполняется неравенство

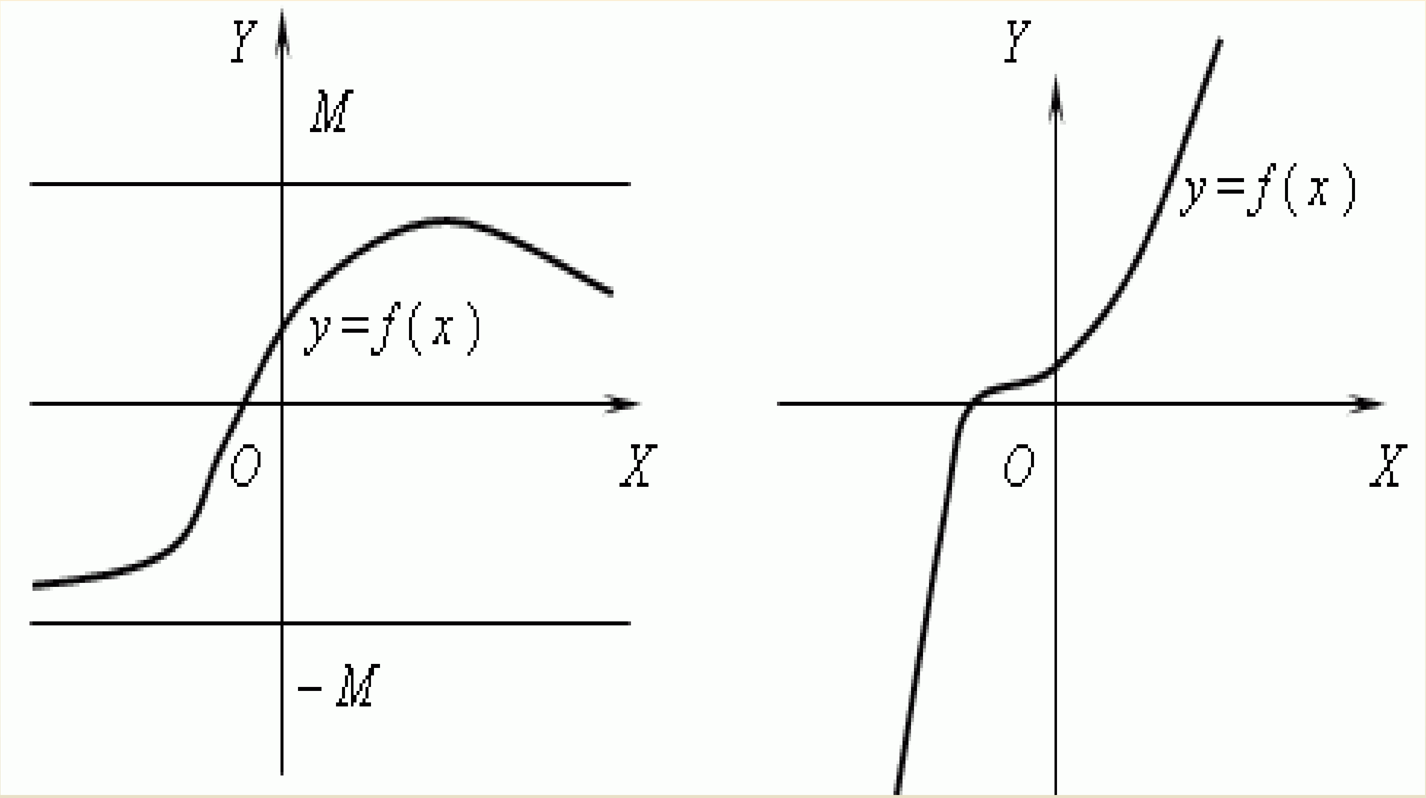
$f(x) < M$).

Ограниченность.

Если множество **Х** не указано, то подразумевается, что речь идет об ограниченности функции сверху или снизу во всей области определения.

Если функция ограничена и сверху, и снизу, то ее называют **ограниченной**.

Ограниченность.



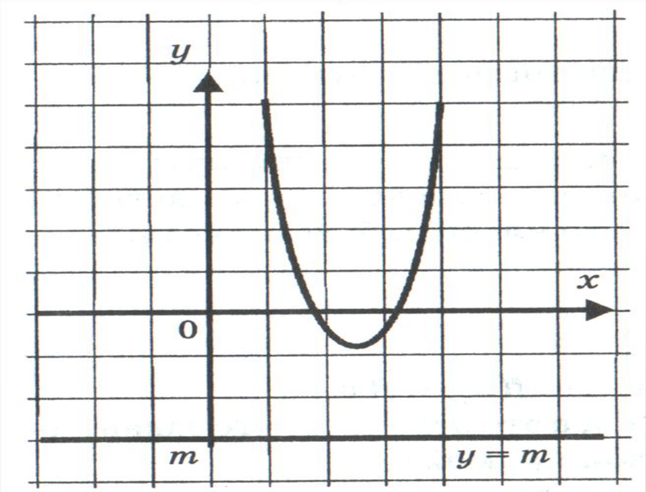
Ограниченная функция

Неограниченная функция

Ограниченность.

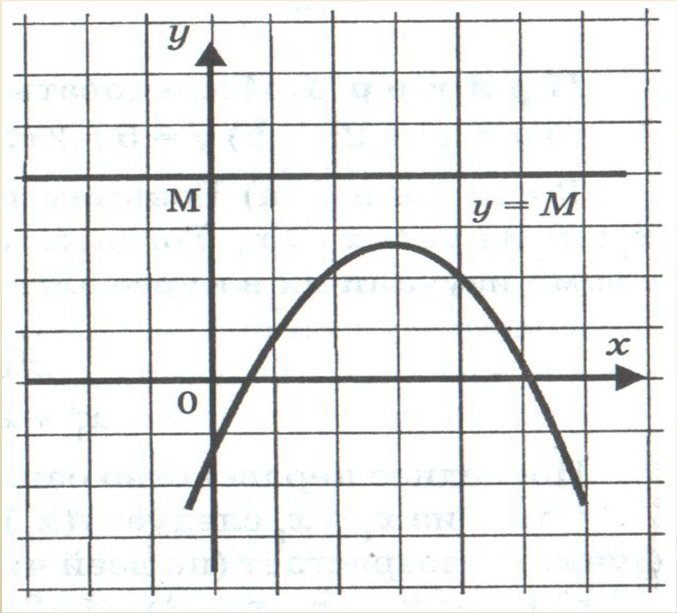
Ограниченность функции легко прочитывается по ее графику:

- ✓ если функция ограничена снизу, то ее график целиком расположен выше некоторой горизонтальной прямой $y = m$



Ограниченность.

- ✓ если функция ограничена сверху, то ее график целиком расположен ниже некоторой горизонтальной прямой $y = M$



Наибольшее и наименьшее значения.

Число m называют **наименьшим значением функции $y = f(x)$ на множестве X Є $D(f)$**, если:

1. в **X** существует такая точка x_0, что $f(x_0) = m$;
2. для всех x из X выполняется неравенство $f(x) \geq f(x_0)$.

Наибольшее и наименьшее значения.

Число ***m*** называют **наибольшим значением функции** ***y = f(x)*** **на множестве X Є *D(f)***, если:

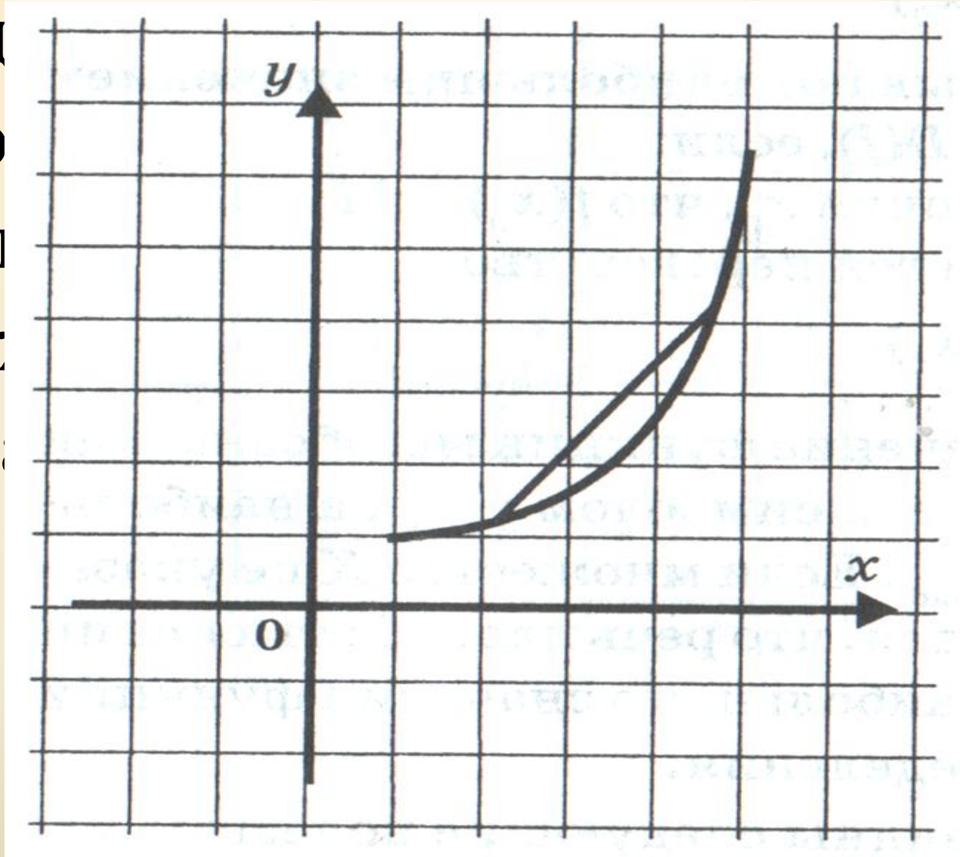
1. в **X** существует такая точка x_0, что $f(x_0) = M$;
2. для всех x из X выполняется неравенство $f(x) \le f(x_0)$.

Достаточно очевидны следующие полезные утверждения:

- *Если у функции существует $y_{наим.}$, то она ограничена снизу.*
- *Если у функции существует $y_{наиб.}$, то она ограничена сверху.*
- *Если функция не ограничена снизу, то $y_{наим.}$ не существует.*
- *Если функция не ограничена сверху, то $y_{наиб.}$ не существует.*

Выпуклость функции.

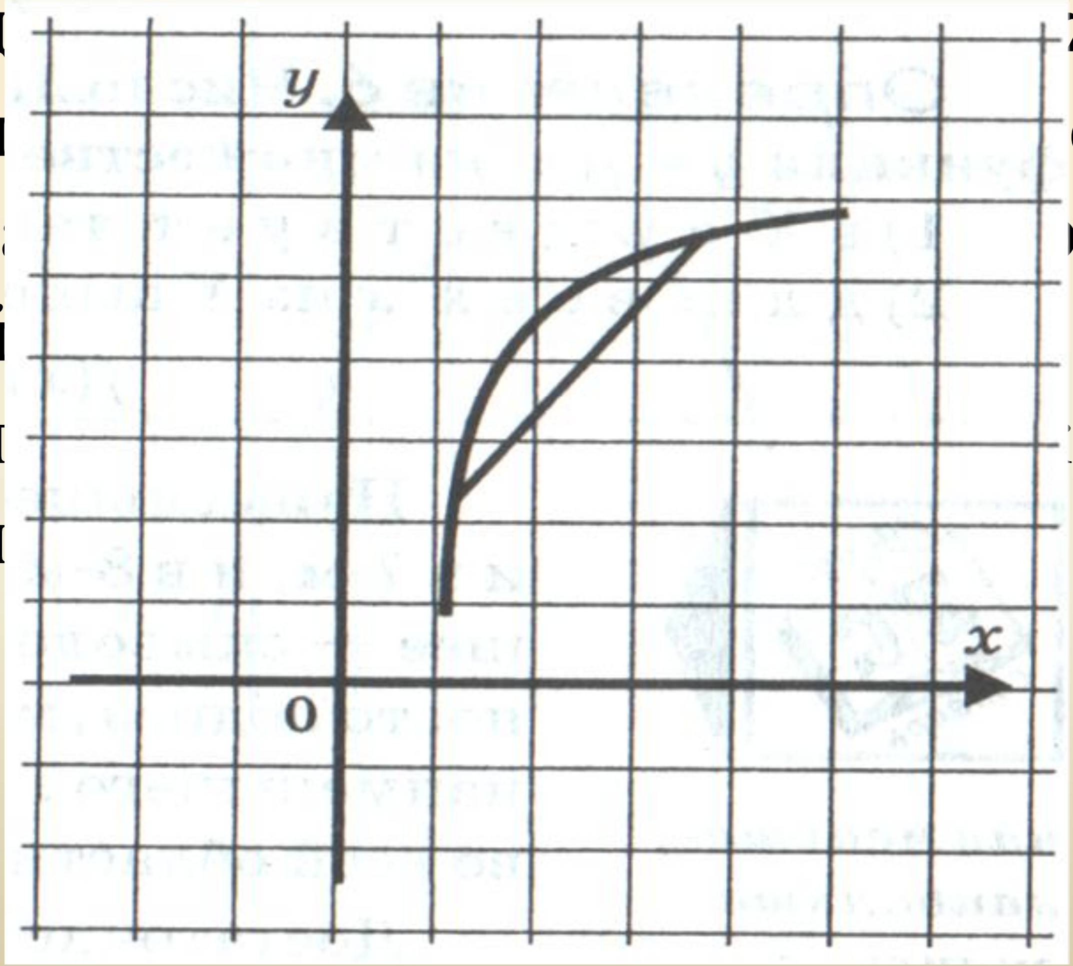
Функц



межутке **X**,
если со... ее графика
(с абсц... мой, мы
обнару... н часть
графика ... го отрезка.

Выпуклость функции.

Функц жутке **X**, если е графика ом прямой соответ жит выше п



Четность и нечетность.

Функцию $y = f(x)$, $x \in X$, называют **четной**, если для любого значения x из множества **X** выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

Функцию $y = f(x)$, $x \in X$, называют **нечетной**, если для любого значения x из множества **X** выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

Изучение вопроса о том, является ли заданная функция четной или нечетной, обычно называют ***исследованием функции на четность.***

Четность и нечетность.

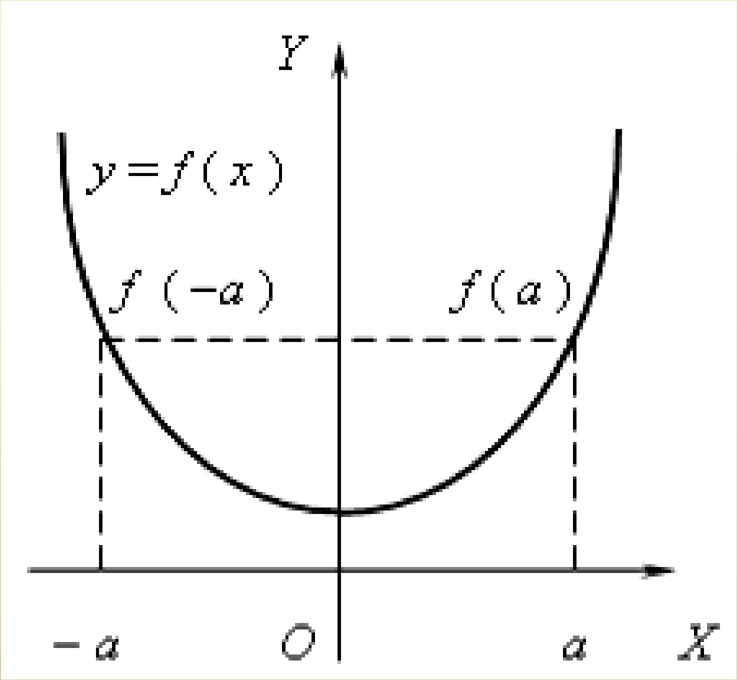
Если функция y = f(x) – четная или нечетная, то ее область определения D(f) – симметричное множество. Если же D(f) – несимметричное множество, то функция ***y = f(x)*** не является ни четной, ни нечетной, т.е. **функцией общего вида**.

Числовое множество **X** называют **симметричным множеством**, если вместе с каждым своим элементом ***x*** содержит и противоположный элемент ***–x***.
Например, (-2;2); [-120;120].

Четность и нечетность.

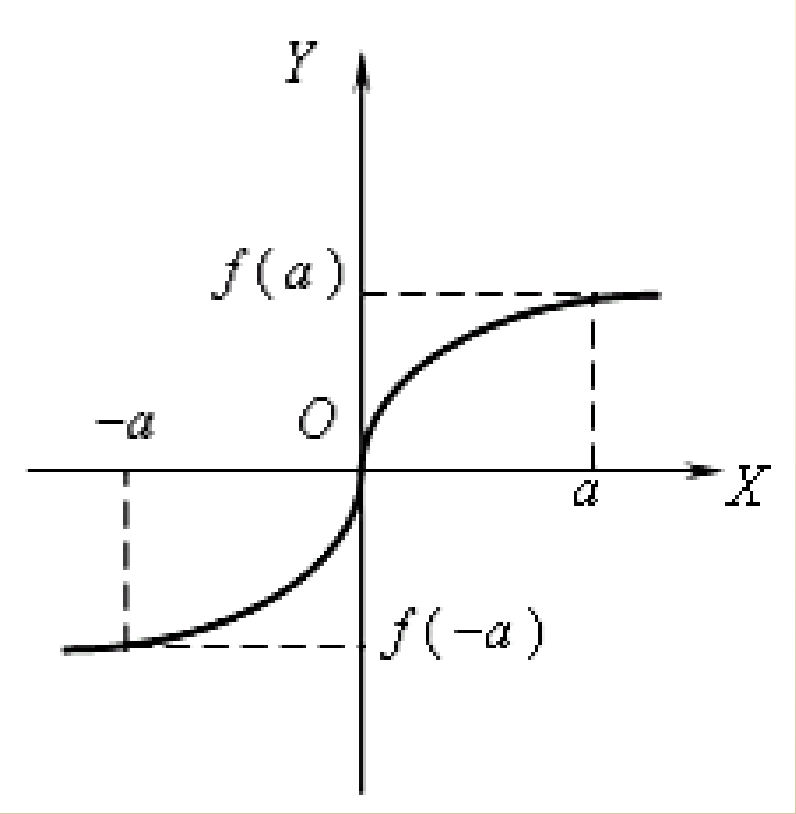
Геометрический смысл свойства четности и свойства нечетности функции:

График четной функции симметричен относительно оси y.



Четность и нечетность.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.



Непрерывность функции.

Еще одно свойство – **непрерывность функции на промежутке *X*** – означает, что график функции на промежутке Х – сплошной, т.е. не имеет проколов и скачков.